

El 4
(254/1959)

UDC 621.392.26

ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA

ELECTRICAL ENGINEERING SERIES NO. 4

M. G. ANDREASEN

**Stetige Übergänge für H_{01} -Welle mit besonderer
Berücksichtigung des konischen Übergangs**

Danish Contribution No. 5
COPENHAGEN 1959

ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA

... a Scandinavian contribution to international engineering sciences

Published under the auspices of the Scandinavian Council for Applied Research

- in *Denmark* by the Danish Academy of Technical Sciences
- in *Finland* by the Finnish Academy of Technical Sciences, the Swedish Academy of Engineering Sciences in Finland, and the State Institute for Technical Research
- in *Norway* by the Norwegian Academy of Technical Science and the Royal Norwegian Council for Scientific and Industrial Research
- in *Sweden* by the Royal Swedish Academy of Engineering Sciences, the Swedish Natural Science Research Council, and the Swedish Technical Research Council

Acta Polytechnica Scandinavica consists of the following sub-series:

Chemistry including Metallurgy Series, Ch
Civil Engineering and Building Construction Series, Ci
Electrical Engineering Series, El
Mathematics and Computing Machinery Series, Ma
Mechanical Engineering Series, Me
Physics including Nucleonics Series, Ph

For subscription to the complete series or to one or more of the sub-series and for purchase of single copies, please write to

ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA PUBLISHING OFFICE

Box 5073

Stockholm 5

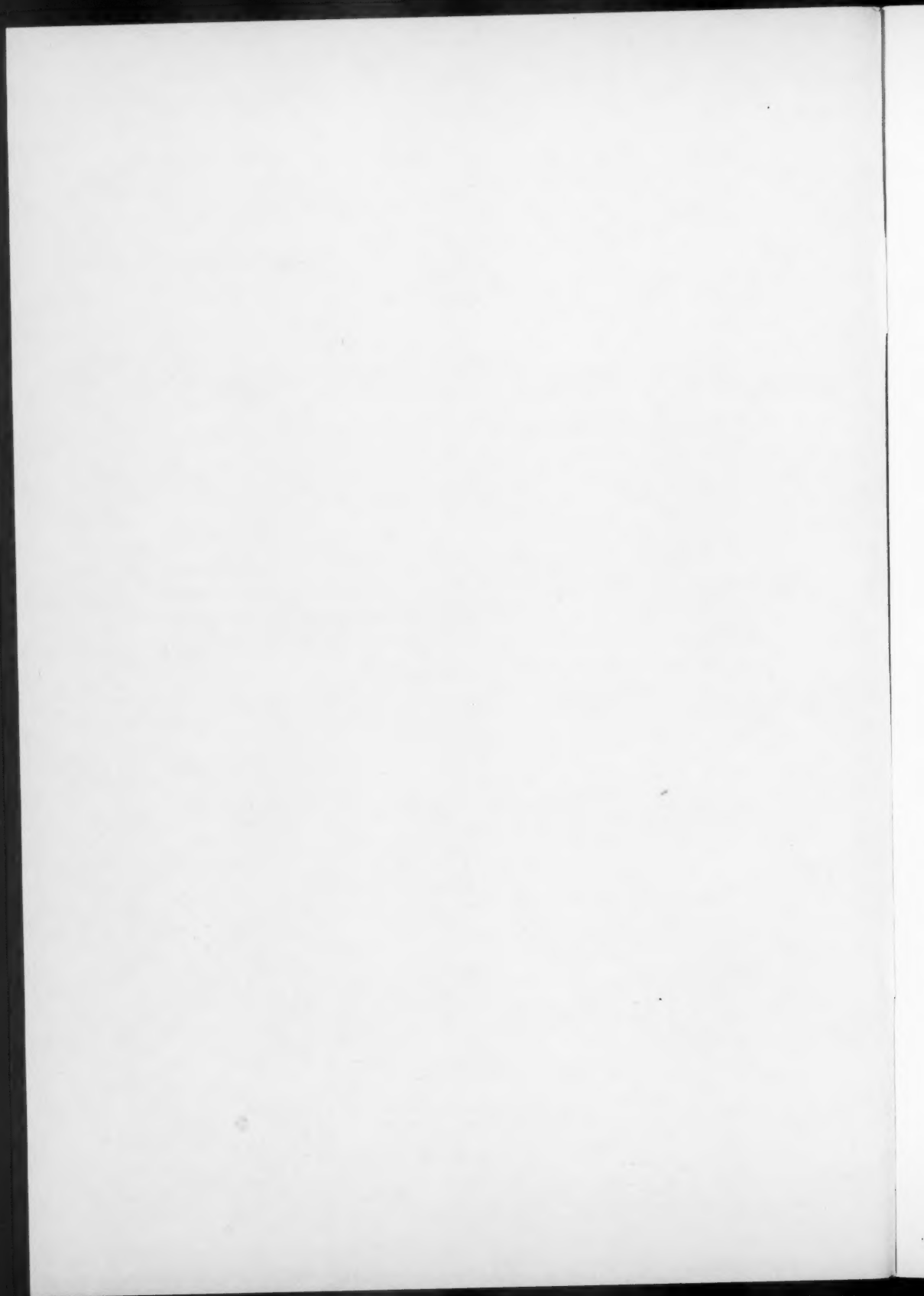
Phone 61 47 53

This issue is published by
THE DANISH ACADEMY OF TECHNICAL SCIENCES
Copenhagen, Denmark

STETIGE ÜBERGÄNGE FÜR H_{01} -WELLE MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DES KONISCHEN ÜBERGANGS

von

M. G. Andreasen
civilingeniør, lic. techn.
Radioingenieurdienst,
Nørrebrogade 10, Kopenhagen N.



ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Übertragung einer H_{01} -Welle durch einen stetigen Übergang zwischen zwei kreisrunden Hohlleitern verschiedener Durchmesser entsteht ein Energieverlust durch Reflexion und durch Umwandlung in andere, ausbreitungsfähige Wellentypen. Dieser Verlust wird berechnet und für einen konischen Übergang in Kurven dargestellt.

Die vorliegende Arbeit wurde während der Tätigkeit des
Verfassers im Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG,
München, ausgeführt.

STETIGE ÜBERGÄNGE FÜR H_{01} -WELLE MIT BESONDERER

BERÜCKSICHTIGUNG DES KONISCHEN ÜBERGANGS

M. G. Andreassen
civilingeniør, lic. techn.
Radioingenieurdienst,
Nørrebrogade 10, Kopenhagen N.

Einleitung.

Zur Übertragung der H_{01} -Welle eines kreisrunden Hohlleiters in einen anderen Hohlleiter mit grösserem oder kleinerem Durchmesser sollen die Übertragungseigenschaften eines stetigen Übergangsstückes mit besonderer Berücksichtigung des konischen Übergangs rechnerisch ermittelt werden. An dem Übergang entsteht ein Energieverlust der zu übertragenden H_{01} -Welle sowohl durch Reflexion einer H_{01} -Welle als auch durch Umwandlung in andere, ausbreitungsfähige Wellentypen. Die an einem Übergang mit kreisrundem Querschnitt erregten Wellentypen sind vom Typ H_{on} . Diese Wellen können kaum durch ein Modusfilter absorbiert werden ohne gleichzeitig die H_{01} -Welle stark zu beeinträchtigen. Sie werden aber im Hohlrohr etwas stärker gedämpft als die H_{01} -Welle. So ist die Dämpfungskonstante der H_{02} -Welle theoretisch 3,35 mal so gross wie die der H_{02} -Welle in der optischen Grenze. Bei endlicher Frequenz wird das Dämpfungsverhältnis noch grösser.

Leonard und Yen [1] haben die Reflexion der H_{01} -Welle an der Übergangsstelle zwischen einem kreisrunden Hohlleiter und einem konischen Horn berechnet. Die Ergebnisse von Leonard und Yen sind nicht in Übereinstimmung mit den bei dieser Untersuchung gewonnenen Resultaten. Die von Leonard und Yen verwendete Methode basiert auf einer Arbeit von Stevenson [2] über elektromagnetische Hörner. King und Marcatili [3] geben an, dass S. P. Morgan bei den Bell-Laboratorien die Modusumwandlungen in einem konischen Übergang berechnet hat. Die Ergebnisse solcher Berechnungen sind in einer Patentschrift [4] von Morgan gegeben und gelten um so besser, je kleiner die Frequenz ist.

Beliebig getaperter Übergang kreisrunden Querschnitts für die H_{01} -Welle

Die Methode, die hier zur Berechnung der Übertragungseigenschaften eines Übergangs zwischen zwei kreisrunden Hohlleitern für die H_{01} -Welle verwendet werden soll, ist grundsätzlich dieselbe wie die von Stevenson [2] in seiner grundlegenden Arbeit über elektromagnetische Hörner und die von Leonard und Yen [1] verwendete Methode. Bei dieser Methode wird das Feld in einem Querschnitt des Übergangs durch Eigenfunktionen des geraden Hohlleiters ausgedrückt; die Maxwell'schen Gleichungen werden zu Differentialgleichungen für die axialen Feldstärken reduziert. Hier sollen jedoch die Maxwell'schen Gleichungen in ein Telegraphengleichungssystem für Spannungen und Ströme in gekoppelten Ersatzleitungen, wie von Schelkunoff [5] diskutiert, übertragen werden, da dies aus einem ingenieurmässigen Gesichtspunkt bequemer ist.

Der Übergang, der untersucht werden soll, ist in Bild 1 gezeigt. Das transversale elektromagnetische Feld in der Querschnittsebene z drücken wir durch eine unendliche Summe von vektoriellen Eigenfunktionen

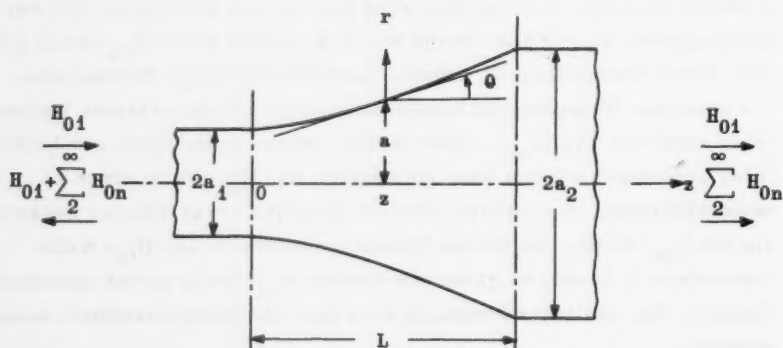


Bild 1. Übergang zwischen zwei kreisrunden Hohlleitern.

des geraden Hohlleiters der gleichen Berandung $r = a$ folgendermassen aus:

$$\vec{E}_t = \sum_0^{\infty} V_n(z) \vec{g}_n, \quad (1)$$

$$\vec{H}_t = \sum_0^{\infty} I_n(z) \vec{h}_n. \quad (2)$$

Hier sind $V_n(z)$ und $I_n(z)$ unbekannte Modusspannungs- und Stromkoeffizienten. \vec{g}_n und \vec{h}_n sind Vektorfunktionen, die folgendermassen definiert sind:

$$\vec{g}_n = \hat{z} \times \nabla_t \psi_n, \quad (3)$$

$$\vec{h}_n = \hat{z} \times \vec{g}_n. \quad (4)$$

Der Operator ∇_t wirkt nur auf die Querschnittskordinaten. ψ_n ist eine skalare Funktion, die der homogenen Wellengleichung

$$(\nabla_t^2 + \kappa_n^2) \psi_n = 0 \quad (5)$$

mit der Randbedingung $\partial \psi_n / \partial n = 0$ an der Querschnittsbegrenzung für H-Wellen Genüge leisten muss. ψ_n wird passend so normiert, dass

$$\int_A \vec{g}_n^2 da = \int_A \vec{h}_n^2 da = 1, \quad (6)$$

(A Querschnittsareal).

Die erste der Reihen (1) und (2) ist gleichmässig konvergent. Die zweite Reihe für das magnetische Feld ist dagegen ungleichmässig konvergent, da die radiale magnetische Feldstärke an der Berandung des Übergangs von Null verschieden ist, während \vec{h}_n den Wert Null an dieser Berandung annimmt. Dies dürfte jedoch keine Schwierigkeiten bereiten, wenn im folgenden diese letzere Reihe nie nach den Querschnittskordinaten differenziert wird.

Das elektromagnetische Feld (1) und (2) muss die Maxwellschen Gleichungen [6] mit der Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$

4.

$$\frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} = -jk \zeta \left[\epsilon + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \right] \cdot (\bar{H}_t \times \hat{z}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} = -j \frac{k}{\zeta} \left[\epsilon + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \right] \cdot (\hat{z} \times \bar{E}_t) \quad (8)$$

erfüllen. k und ζ sind hier die spezifische Ausbreitungskonstante und die Impedanz des Übertragenden Mediums. ϵ ist die Einheitsdyade. In dem Übergang kreisrunden Querschnitts für die H_{01} -Welle werden wie oben erwähnt nur H_{0n} -Wellen angeregt. Für die H_{0n} -Welle gilt:

$$\psi_n = M_n J_0(\kappa_n r) / \kappa_n \quad (9)$$

$$\bar{g}_n = -M_n J_1(\kappa_n r) \hat{\phi} \quad (10)$$

$$M_n^{-1} = \sqrt{\kappa_n^2} J_0(\kappa_n a), \quad J_1(\kappa_n a) = 0 \quad (11)$$

Durch Einsetzung dieses Ausdrucks für \bar{g}_n in (1) und (2) reduzieren sich die Maxwell'schen Gleichungen (7)-(8) auf die folgenden Differentialgleichungen für die Koeffizienten V_n und I_n

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} V_n M_n J_1(\kappa_n r) = -jk \zeta \sum_{n=0}^{\infty} I_n M_n J_1(\kappa_n r) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} I_n M_n J_1(\kappa_n r) = -\frac{1}{jk \zeta} \sum_{n=0}^{\infty} V_n M_n (\kappa_n^2 - k^2) J_1(\kappa_n r) \quad (13)$$

oder durch Differentiation nach z

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n M_n r J_1'(\kappa_n r) \frac{d\kappa_n}{dz} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (V_n M_n) J_1(\kappa_n r) = -jk \zeta \sum_{n=0}^{\infty} I_n M_n J_1(\kappa_n r) \quad (14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n M_n r J_1'(\kappa_n r) \frac{d\kappa_n}{dz} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (I_n M_n) J_1(\kappa_n r) = -\frac{1}{jk \zeta} \sum_{n=0}^{\infty} V_n M_n (\kappa_n^2 - k^2) J_1(\kappa_n r) \quad (15)$$

Zur Reduktion dieses Gleichungssystems multiplizieren wir beiderseits mit $r J_1(\kappa_p r)$ und integrieren die Gleichungen von 0 bis a . Unter Benützung der Integrale

$$\int_0^a J_1(\kappa_p r) J_1(\kappa_n r) r dr = \begin{cases} \frac{a^2}{2} J_0^2(\kappa_p a) & \text{für } n = p \\ 0 & \text{für } n \neq p \end{cases} \quad (16)$$

$$\int_0^a J_1(\kappa_p r) J_1'(\kappa_n r) r^2 dr = \begin{cases} -\frac{a^2}{2\kappa_p} J_0^2(\kappa_p a) & \text{für } n = p \\ -\frac{a^2}{\kappa_p} \frac{J_0(\kappa_p a) J_0(\kappa_n a)}{1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_p}\right)^2} & \text{für } n \neq p \end{cases} \quad (17)$$

die unter der Bedingung (11) gültig sind, folgen dann die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dz} (V_p M_p) + jk\zeta I_p M_p - V_p M_p \frac{1}{\kappa_p} \frac{d\kappa_p}{dz} = \frac{2}{\kappa_p} \sum_{n=0}^{\infty'} V_n M_n \frac{d\kappa_n}{dz} \frac{J_0(\kappa_n a)}{J_0(\kappa_p a)} \frac{1}{1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_p}\right)^2} \quad (18)$$

$$\frac{d}{dz} (I_p M_p) + \frac{\kappa_p^2 - k^2}{jk\zeta} V_p M_p - I_p M_p \frac{1}{\kappa_p} \frac{d\kappa_p}{dz} = \frac{2}{\kappa_p} \sum_{n=0}^{\infty'} I_n M_n \frac{d\kappa_n}{dz} \frac{J_0(\kappa_n a)}{J_0(\kappa_p a)} \frac{1}{1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_p}\right)^2} \quad (19)$$

Die gestrichelte Summe bedeutet $n \neq p$. Nach (11) ist

$$\frac{dM_p}{dz} = -M_p \frac{1}{a} \frac{da}{dz} = -M_p \frac{\tan\theta}{a} \quad (20)$$

Ferner ist
$$\frac{d\kappa_p}{dz} = -\frac{\kappa_p}{a} \frac{da}{dz} = -\kappa_p \frac{\tan\theta}{a} \quad (21)$$

da $\kappa_p a$ unabhängig von z ist. Führen wir jetzt (20), (21) und den Ausdruck (11) für M_n in die Gleichungen (18) und (19), ein so erhalten wir schliesslich das gewünschte Telegraphengleichungssystem

$$\frac{dV_p}{dz} + jk\zeta I_p = 2 \frac{\tan\theta}{a} \sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{\kappa_n \kappa_p}{\kappa_n^2 - \kappa_p^2} \quad (22)$$

$$\frac{dI_p}{dz} - \frac{\beta_p^2}{jk\zeta} V_p = 2 \frac{\tan\theta}{a} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{\kappa_n \kappa_p}{\kappa_n^2 - \kappa_p^2} \quad (23)$$

} $p = 0, 1, 2, \dots$

Hier ist $\beta_p = \sqrt{k^2 - \kappa_p^2}$ die Ausbreitungskonstante des geraden Hohlleiters. Man verifiziert leicht, dass dieses Gleichungssystem die bekannten, ungekoppelten Wellentypen des geraden Hohlleiters wenn $\theta = 0$ ist.

Wenn θ klein ist und die Kopplung zwischen den Wellentypen somit ebenfalls klein ist, kann die Kopplung zwischen einem Wellentyp p , der auf den Übergang einfällt, und einem anderen Wellentyp q näherungsweise durch die folgenden einfachen Telegraphengleichungen dargestellt werden:

$$\frac{dV_p}{dz} + jk\zeta I_p = 2 \frac{\tan\theta}{a} \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_q^2 - \kappa_p^2} V_q \quad (24)$$

$$\frac{dI_p}{dz} - \frac{\beta_p^2}{jk\zeta} V_p = 2 \frac{\tan\theta}{a} \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_q^2 - \kappa_p^2} I_q \quad (25)$$

$$\frac{dV_q}{dz} + jk\zeta I_q = -2 \frac{\tan\theta}{a} \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_q^2 - \kappa_p^2} V_p \quad (26)$$

$$\frac{dI_q}{dz} - \frac{\beta_q^2}{jk\zeta} V_q = -2 \frac{\tan\theta}{a} \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_q^2 - \kappa_p^2} I_p \quad (27)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich Näherungsausdrücke für den Anteil der Energie des einfallenden Wellentyps p , der reflektiert wird, und den Anteil, der in andere, ausbreitungsfähige Wellentypen umgewandelt wird, bestimmen. Dies wird im folgenden für einen konischen Übergang gemacht.

Konischer Übergang
Reflexion der einfallenden Welle

Die Reflexion des einfallenden Wellentyps p an dem Übergang lässt sich aus den Gleichungen (24)-(25) näherungsweise bestimmen unter Vernachlässigung der Kopplung zu anderen Wellentypen, wenn $\Theta \ll 1$. Aus dem homogenen Gleichungssystem

$$V_p' + jk\zeta I_p = 0 \quad (28)$$

$$I_p' - \frac{\beta_p^2}{jk\zeta} V_p = 0 \quad (29)$$

suchen wir dann die Impedanz der Hornwelle und können gleich die Reflexionen an beiden Enden des Übergangs bestimmen. Die zusammengehörenden Differentialgleichungen werden in die folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung reduziert

$$V_p'' + \beta_p^2 V_p = 0 \quad (30)$$

$$I_p'' - 2 \frac{\beta_p'}{\beta_p} I_p' + \beta_p^2 I_p = 0 \quad (31)$$

Zur Lösung dieser Gleichungen, in denen β_p eine Funktion von z ist, machen wir für V_p und I_p die Ansätze

$$V_p = g e^{-j \int_0^z \gamma dz} \quad (32)$$

$$I_p = \frac{h}{jk\zeta} e^{-j \int_0^z \gamma dz} \quad (33)$$

Die Grössen γ , g und h , die sich nur langsam mit z ändern, werden nach Potenzen von Θ entwickelt:

$$\gamma = \sum \gamma_n(z, \Theta^n), \quad g = \sum g_n(z, \Theta^n), \quad h = \sum h_n(z, \Theta^n) \quad (34)$$

Man führt jetzt diese Ansätze in (30) und (31) ein. Glieder, die von gleicher Grössenordnung von Θ sind, werden gleichgesetzt. Man beachtet, dass die r -ten Ableitungen der Teilfunktionen γ_n , g_n und

8.

h_n nach z die Potenzabhängigkeit $n+r$ von θ besitzen. Auf diese Weise erhält man:

$$g_0 = \beta_p^{-\frac{1}{2}}, \quad h_0 = j\beta_p^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_0 = \beta_p, \quad \gamma_1 = 0 \quad (35)$$

$$g_1 = \frac{j}{16} \beta_p^{-\frac{1}{2}} \theta \left[\frac{10}{3} \frac{(\kappa_p a)^2}{(\beta_p a)^3} + \frac{2}{\beta_p a} - \frac{2}{\kappa_p a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\kappa_p}{\beta_p} \right) \right] \quad (36)$$

$$h_1 = -\frac{1}{16} \beta_p^{\frac{1}{2}} \theta \left[-\frac{14}{3} \frac{(\kappa_p a)^2}{(\beta_p a)^3} + \frac{2}{\beta_p a} - \frac{2}{\kappa_p a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\kappa_p}{\beta_p} \right) \right] \quad (37)$$

Die diesen Ergebnissen zugrunde liegenden Berechnungen sind im Anhang aufgeführt. Die Funktionen γ_2 , g_2 und h_2 werden nicht berechnet, da nur eine Näherung erster Ordnung für die Reflexion angestrebt wird. Bei einer Näherung zweiter Ordnung für die Reflexion müsste auch die Anregung von anderen Wellentypen berücksichtigt werden. Die Lösung (35) - (37) stellt eine in der positiven z -Richtung fortschreitende Welle dar. Die Lösung einer rückwärtslaufenden Welle ergibt sich aus (35) - (37) durch Wechseln des Vorzeichens für γ_0 , h_0 und h_1 . Bei der Berechnung von g_1 und h_1 wurde vorausgesetzt, dass $a''=0$, d.h. θ unabhängig von z ist wie im konischen Übergang.

Die Impedanz der fortschreitenden oder der rückwärtslaufenden Welle im konischen Übergang ist also näherungsweise

$$Z = \frac{V}{I_p} = jk\zeta \frac{g_0 + g_1}{h_0 + h_1} \approx \frac{k\zeta}{\beta_p} \left[1 + j \frac{\theta}{2} \frac{(\kappa_p a)^2}{(\beta_p a)^3} \right] \quad (38)$$

Im Eingangshohlleiter ist die Impedanz $k\zeta/\beta_{p1}$, im Ausgangshohlleiter $k\zeta/\beta_{p2}$. Die Grössen β_{p1} und β_{p2} sind die Ausbreitungskonstanten des Wellentyps p in dem Eingangshohlleiter 1 bzw. dem Ausgangshohlleiter 2. Wenn die Reflexion klein ist, ergibt sich für den Reflexionskoeffizienten an der Knickstelle am Anfang $z = 0$ des Übergangs

$$\Gamma_1 = j \frac{\theta}{4} \frac{(\kappa_p a)^2}{(\beta_{p1} a_1)^3} \quad (39)$$

und für den Reflexionskoeffizienten an der Knickstelle am Ende $z = L$ des Übergangs

$$\Gamma_2 = -j \frac{\theta}{4} \frac{(\kappa_p a)^2}{(\beta_{p2} a_2)^3} \quad (40)$$

Unter der Vernachlässigung der Wechselwirkung erhält man für den absoluten Höchstwert des Reflexionskoeffizienten im Eingangshohlleiter

$$|\Gamma|_{\max} = |\Gamma_1| + |\Gamma_2| = \frac{|\theta|}{4} (\kappa_p a)^2 \left[\left(\frac{1}{\beta_{p1} a_1} \right)^3 + \left(\frac{1}{\beta_{p2} a_2} \right)^3 \right] \quad (41)$$

Diese Ausdrücke gelten sowohl für einen konvergierenden Übergang (θ negativ) als auch für einen divergierenden Übergang (θ positiv). Der absolute Wert des Reflexionskoeffizienten ist also derselbe wenn in den Hohlleiter 2 eingespeist wird, wie wenn in den Hohlleiter 1 eingespeist wird. Dies entspricht einem bekannten Satz aus der Vierpoltheorie. Mit der H_{01} -Welle ($\kappa_1 a = 3,832$) als einfallende Welle ist der Betrag des Reflexionskoeffizienten Γ_1 bzw. Γ_2 in Bild 2 dargestellt in Abhängigkeit von a_1/λ bzw. a_2/λ für verschiedene Werte von θ . Man bemerkt die

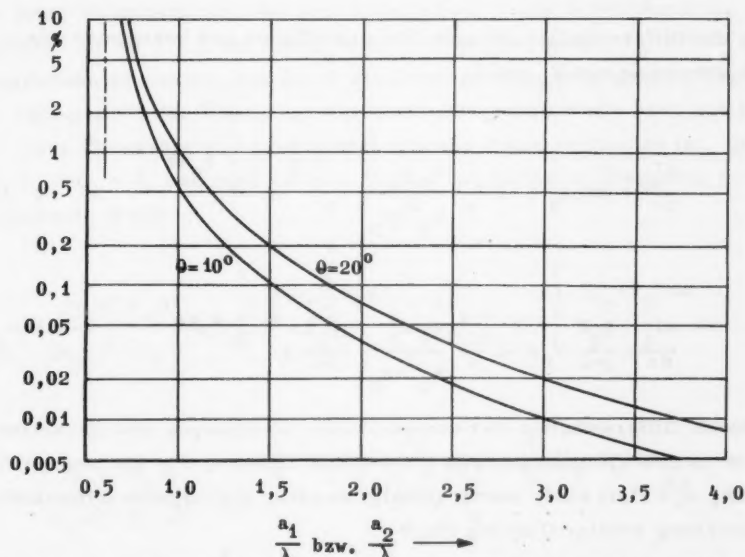


Bild 2. Absoluter Wert des Reflexionskoeffizienten am Anfang bzw. Ende eines konischen Übergangs durch Übertragung einer H_{01} -Welle.

ausserordentlich schnelle Abnahme des Reflexionskoeffizienten mit wachsender Frequenz. Mit einem 50-mm-Hohlrohr und einer Frequenz von 30 GHz ist der Reflexionskoeffizient am Anfang eines konischen Übergangs mit $\theta = 10^\circ$ nur 0,02 %, was praktisch ohne Bedeutung ist.

Umwandlung in andere Wellentypen

Ein Teil der Energie der einfallenden Welle wird an dem Übergang in andere, ausbreitungsfähige Wellentypen umgewandelt. Die von einem zu übertragenden Wellentyp p in einen Wellentyp q umgewandelte Energie kann näherungsweise aus (26) und (27) dadurch berechnet werden, dass auf der rechten Seite dieser Gleichungen für die einfallende Welle die einfache Näherung (35) eingesetzt wird. Wir setzen also

$$V_p = \beta_p e^{-\frac{1}{2}z - j \int_0^z \beta_p dz} \quad (42)$$

$$I_p = \frac{j\beta_p}{jk\zeta} e^{-\frac{1}{2}z - j \int_0^z \beta_p dz} \quad (43)$$

in die Differentialgleichungen (26) und (27) ein und bekommen zur Bestimmung von V_q und I_q

$$\frac{dI_q}{dz} + jk\zeta I_q = -2 \frac{a'}{a} \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_q^2 - \kappa_p^2} \beta_p e^{-\frac{1}{2}z - j \int_0^z \beta_p dz} \quad (44)$$

$$\frac{dI_q}{dz} - \frac{\beta_q}{jk\zeta} V_q = -2 \frac{a'}{a} \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_q^2 - \kappa_p^2} \frac{j\beta_p}{jk\zeta} e^{-\frac{1}{2}z - j \int_0^z \beta_p dz} \quad (45)$$

Durch Differentiation der ersten dieser Gleichungen und Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt sich, indem Glieder, die von zweiter Ordnung in θ klein sind, vernachlässigt werden, die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für V_q

$$\frac{d^2 V_q}{dz^2} + \beta_q^2 V_q = j4 \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_q^2 - \kappa_p^2} \frac{a'}{a} \beta_p e^{-\frac{1}{2}z - j \int_0^z \beta_p dz} \quad (46)$$

Die partikulären Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung sind nach (35) in erster Näherung

$$V_q = \beta_q e^{-\frac{1}{2}z} + j \int_0^z \beta_q dz \quad (47)$$

Die dazu gehörende Wronskideterminante ist gleich $2j$, und die vollständige Lösung der Differentialgleichung (46) kann dann folgendermaßen geschrieben werden

$$V_q = \left[C_1 - 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \int_0^z \sqrt{\frac{\beta_p a'}{\beta_q a}} e^{-j \int_0^z (\beta_p - \beta_q) dz} dz \right] \beta_q e^{-\frac{1}{2}z} - j \int_0^z \beta_q dz$$

$$+ \left[C_2 + 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \int_z^L \sqrt{\frac{\beta_p a'}{\beta_q a}} e^{-j \int_0^z (\beta_p + \beta_q) dz} dz \right] \beta_q e^{-\frac{1}{2}z} + j \int_0^z \beta_q dz \quad (48)$$

Als Integrationsgrenzen sind hier 0 und z bzw. z und L zweckmässig gewählt. Es ist $z = L$ am Ende des konischen Übergangs. C_1 und C_2 sind Integrationskonstanten, die durch die Randbedingungen gegeben sind, dass am Anfang $z = 0$ des Übergangs nur eine reflektierte Welle bzw. am Ende $z = L$ des Übergangs nur eine fortschreitende Welle vorhanden ist. Dies gibt $C_1 = C_2 = 0$, und man hat also für die am Ende des Übergangs fortschreitende Welle

$$V_{q2} = -2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q2} e^{-\frac{1}{2}z} - j \int_0^L \beta_q dz \int_0^L \sqrt{\frac{\beta_p a'}{\beta_q a}} e^{-j \int_0^z (\beta_p - \beta_q) dz} dz \quad (49)$$

$$= -2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q2} e^{-\frac{1}{2}z} - j \int_0^L \beta_q dz \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{\beta_p}{\beta_q}} e^{-j \int_0^z (\beta_p - \beta_q) dz} \frac{da}{a} \quad (50)$$

und für die am Anfang des Übergangs reflektierte Welle

$$V_{q1} = 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q1} - \frac{1}{2} \int_0^L \sqrt{\frac{\beta_p a'}{\beta_q a}} e^{-j \int_0^z (\beta_p + \beta_q) dz} dz \quad (51)$$

$$= 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q1} - \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{\beta_p}{\beta_q}} e^{-j \int_0^z (\beta_p + \beta_q) dz} \frac{da}{a} \quad (52)$$

Hier sind β_{q1} und β_{q2} die Ausbreitungskonstanten des Wellentyps q im Eingangshohlleiter 1 und im Ausgangshohlleiter 2. Die Ausdrücke gelten nicht nur für einen konischen Übergang, sondern auch für einen Übergang beliebigen Verlaufs. Nur ist vorauszusetzen, dass $\theta \ll 1$ ist und dass die aus (49)-(52) berechnete Energieumwandlung der einfallenden Welle p relativ klein ist.

Die in (49)-(52) eingehenden Integrale für den konischen Übergang lassen sich nur schwer ohne einschränkende Annahmen in geschlossene Form bringen. Es sei daher zunächst angenommen, dass

$$k \gg \kappa_p; \quad k \gg \kappa_q; \quad \kappa_q^2 + \kappa_p^2 \ll 4k^2 \quad (53)$$

Diese Bedingungen sind um so besser erfüllt, je höher die Frequenz ist gegenüber den Grenzfrequenzen der zwei betrachteten Wellentypen. Unter den Bedingungen (53) können wir dann für die in (50) und (52) eingehenden Größen näherungsweise schreiben

$$\beta_p - \beta_q = \sqrt{k^2 - \kappa_p^2} - \sqrt{k^2 - \kappa_q^2} \approx \frac{\kappa_q^2 - \kappa_p^2}{2k} \quad (54)$$

$$\beta_p + \beta_q = \sqrt{k^2 - \kappa_p^2} + \sqrt{k^2 - \kappa_q^2} \approx 2k \quad (55)$$

$$\sqrt{\frac{\beta_p}{\beta_q}} = \sqrt{\frac{k^2 - \kappa_p^2}{k^2 - \kappa_q^2}} \approx 1 \quad (56)$$

Im konischen Horn ist θ unabhängig von z . Mit den Näherungen (54)-(56) ergibt sich dann

$$\int_0^z (\beta_p - \beta_q) dz \approx - \frac{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2}{2\theta} \left(\frac{1}{ka} - \frac{1}{ka_1} \right) \quad (57)$$

$$\int_0^z (\beta_p + \beta_q) dz \approx \frac{2}{\theta} [ka - ka_1]$$

Für den absoluten Wert der Spannung des in den Hohlleiter 2 fortschreitenden Wellentyps q errechnet sich damit

$$|V_{q2}| \approx 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q2} - \frac{1}{2} \left| \int_{a_1}^{a_2} e^{j \frac{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2}{2\theta} \frac{1}{ka}} \frac{da}{a} \right| \quad (58)$$

$$= 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q2} - \frac{1}{2} \left| (Ciw_2 - Ciw_1) + j(Siw_2 - Siw_1) \right| \quad (59)$$

Hier ist $w_1 = \frac{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2}{2\theta} \frac{1}{ka_1}$ (60)

$$w_2 = \frac{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2}{2\theta} \frac{1}{ka_2} \quad (61)$$

und Ci bzw. Si sind Funktionen der Integral-Cosinus bzw. der Integral-Sinus. Dementsprechend findet man für den absoluten Wert der Spannung des in den Hohlleiter 1 reflektierten Wellentyps q

$$|V_{q1}| \approx 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q1} - \frac{1}{2} \left| \int_{a_1}^{a_2} e^{-j \frac{2}{\theta} ka} \frac{da}{a} \right| \quad (62)$$

$$= 2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \beta_{q1} - \frac{1}{2} \left| (Ciu_2 - Ciu_1) - j(Siu_2 - Siu_1) \right| \quad (63)$$

Hier ist
$$u_1 = \frac{2ka_1}{\theta} ; \quad u_2 = \frac{2ka_2}{\theta} \quad (64)$$

Für die relative Energieumwandlung des einfallenden Wellentyps p in den am Übergang fortschreitenden und reflektierten Wellentyp q gewinnt man, da $\frac{k_L^q}{\beta_{q1}}$ und $\frac{k_L^q}{\beta_{q2}}$ die Impedanzen des Wellentyps q im Hohlleiter 1 bzw. Hohlleiter 2 sind, und da nach (32)-(33) und (35) $1/k_L^p$ die Energie des einfallenden Wellentyps p ist

$$\frac{P_{q2}}{P_p} \approx \beta_{q2} |V_{q2}|^2 = \left(2 \frac{(\kappa_p a) (\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \right)^2 \left| (Ciw_2 - Ciw_1) + j (Siw_2 - Siw_1) \right|^2 \quad (65)$$

$$\frac{P_{q1}}{P_p} \approx \beta_{q1} |V_{q1}|^2 = \left(2 \frac{(\kappa_p a) (\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \right)^2 \left| (Ciu_2 - Ciu_1) - j (Siu_2 - Siu_1) \right|^2 \quad (66)$$

In dem praktisch wichtigen Fall

$$w_1 \gg 1 ; \quad w_2 \gg 1 ; \quad u_1 \gg 1 ; \quad u_2 \gg 1 \quad (67)$$

können die in (65)-(66) eingehenden Integralfunktionen durch

$$Ci x \approx \frac{\sin x}{x} ; \quad Si x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} ; \quad x \gg 1 \quad (68)$$

angenähert werden, und es ergibt sich

$$\frac{P_{q2}}{P_p} \approx \left(2 \frac{(\kappa_p a) (\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \right)^2 \left[\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} - 2 \frac{\cos(w_1 - w_2)}{w_1 w_2} \right] \quad (69)$$

$$\frac{P_{q1}}{P_p} \approx \left(2 \frac{(\kappa_p a) (\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \right)^2 \left[\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} - 2 \frac{\cos(u_1 - u_2)}{u_1 u_2} \right] \quad (70)$$

Die Energieumwandlungen oszillieren mit der Frequenz. Die maximalen Energieumwandlungen ergeben sich durch Ersetzung der in (69) und (70) eingehenden Cosinusfunktionen durch -1 und sind

$$\left(\frac{P_{q2}}{P_p} \right)_{\max} \approx \left\{ 4 \frac{(\kappa_p a) (\kappa_q a)}{[(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2]^2} \frac{(ka_2)^2 - (ka_1)^2}{kL} \right\}^2 \quad (71)$$

$$\left(\frac{P_{q1}}{P_p}\right)_{\max} = \left\{ \frac{(\kappa_p a) (\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \frac{(ka_2)^2 - (ka_1)^2}{(ka_1) (ka_2)} \frac{1}{kL} \right\}^2 \quad (72)$$

Man bemerkt gleich, dass die reflektierte Energie des Wellentyps q erheblich kleiner als die fortschreitende Energie dieses Wellentyps ist. Ferner bemerkt man, dass die Energieumwandlungen (71) und (72) symmetrisch in a_1 und a_2 sind. Die Energieumwandlungen in einem divergierenden Übergang sind deshalb gleich den Energieumwandlungen in einem konvergierenden Übergang, wenn die Endquerschnitte gleich sind.

Mit der H_{01} -Welle ($\kappa_1 a = 3,832$) als einfallende Welle ist der Energieverlust im konischen Horn durch Umwandlung in die weiterlaufenden Wellentypen H_{02} ($\kappa_2 a = 7,016$) und H_{03} ($\kappa_3 a = 10,173$) und in die reflektierte H_{02} -Welle in den Bildern 3, 4 und 5 dargestellt.

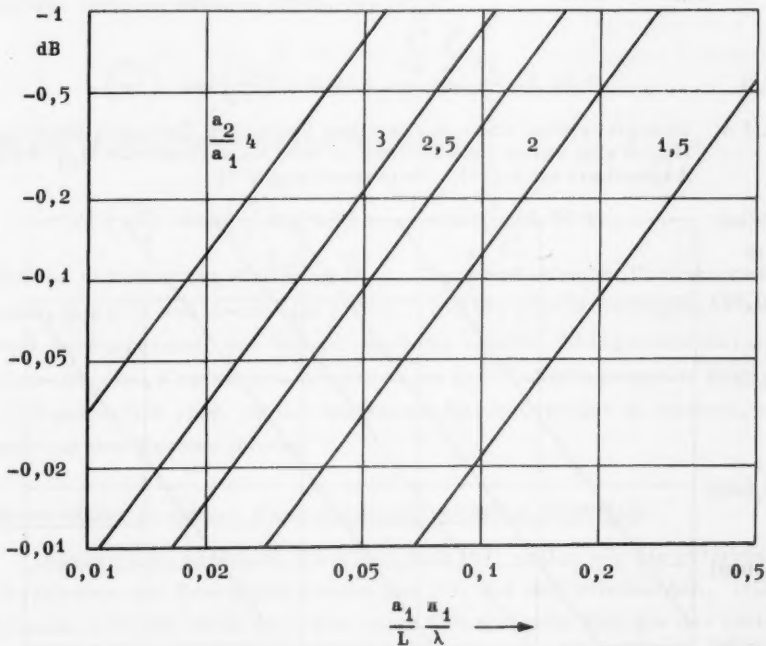


Bild 3. Energieverlust einer durch einen konischen Übergang übertragenen H_{01} -Welle durch Umwandlung in eine weiterlaufende H_{02} -Welle. Angenähert nach (74). Voraussetzung (73).

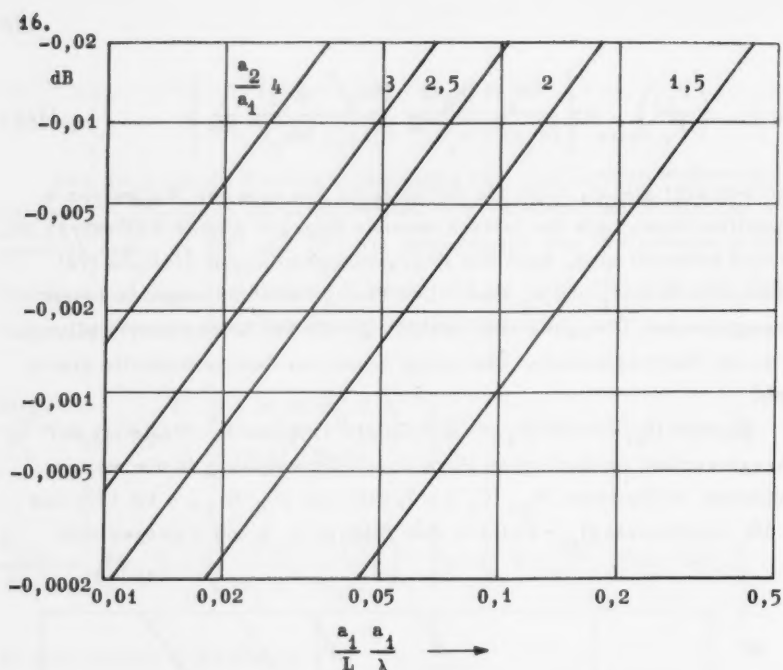


Bild 4. Energieverlust einer durch einen konischen Übergang übertragenen H_{01} -Welle durch Umwandlung in eine weiterlaufende H_{03} -Welle. Angenähert nach (71). Voraussetzung (74).

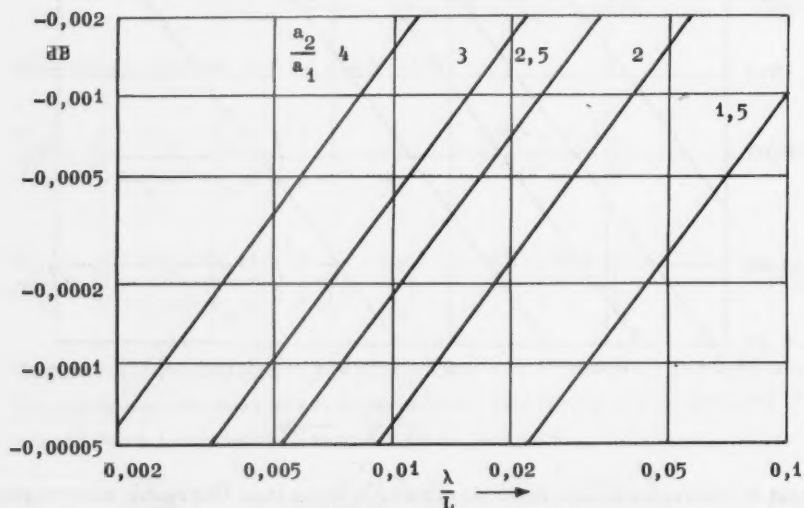


Bild 5. Energieverlust einer durch einen konischen Übergang übertragenen H_{01} -Welle durch Umwandlung in eine reflektierte H_{02} -Welle. Angenähert nach (72). Voraussetzung (75).

Gezeigt ist der Energieverlust in bezug auf die Energie der einfallenden H_{01} -Welle in dB in Abhängigkeit von (a_1/L) (a_1/λ) bzw. λ/L und für verschiedene Werte von a_2/a_1 . Streng genommen gelten die Kurven nur für einen divergierenden Übergang mit $a_2 > a_1$ da Kurven nur für $a_2 > a_1$ aufgezeichnet werden. Wie oben erwähnt, werden die Kurven jedoch auch für einen konvergierenden Übergang gültig wenn a_1 durch a_2 und a_2 durch a_1 ersetzt werden. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Kurven sind nach (53) und (70)

$$\left(\frac{a_1}{\lambda}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{a_2}{\lambda}\right)^2 \gg 0,40; \quad \theta \frac{a_1}{\lambda} \text{ und } \theta \frac{a_2}{\lambda} \ll 2,7 \quad (73)$$

für den fortschreitenden Wellentyp H_{02} ,

$$\left(\frac{a_1}{\lambda}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{a_2}{\lambda}\right)^2 \gg 0,75; \quad \theta \frac{a_1}{\lambda} \text{ und } \theta \frac{a_2}{\lambda} \ll 7,1 \quad (74)$$

für den fortschreitenden Wellentyp H_{03} ,

$$\left(\frac{a_1}{\lambda}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{a_2}{\lambda}\right)^2 \gg 0,40; \quad \frac{a_1}{\lambda} \text{ und } \frac{a_2}{\lambda} \gg 0,08 \theta \quad (75)$$

für den reflektierten Wellentyp H_{02} , und

$$\left(\frac{a_1}{\lambda}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{a_2}{\lambda}\right)^2 \gg 0,75; \quad \frac{a_1}{\lambda} \text{ und } \frac{a_2}{\lambda} \gg 0,08 \theta \quad (76)$$

für den reflektierten Wellentyp H_{03} . Die θ enthaltenden Voraussetzungen sind praktisch meist sehr gut erfüllt. Ausser diesen Bedingungen wurde $\theta \ll 1$ vorausgesetzt, und ferner, dass die relative Energieumwandlung klein ist. Bei Frequenzen, an denen die $(a/\lambda)^2$ -Bedingungen in (73)-(76) nicht gut erfüllt sind, ist mit kleinerem Energieverlust zu rechnen, als man von den Kurven abliest.

Umwandlung in andere Wellentypen im optischen Grenzfall

Ausser dem praktisch wichtigen Fall (67) wollen wir die optischen Grenzwerte der Energieumwandlungen (65) und (66) untersuchen. Optisch gesehen wird für einen divergierenden Übergang die Energie der einfallenden Welle in den Hohlleiter 2 in Form eines Lichtbündels mit dem Radius a_1 weitergeleitet werden. Die Reflexion muss Null werden, und die Energieumwandlung in einen bestimmten Wellentyp im Hohlleiter 2 nähert sich einen Grenzwert.

Der optische Grenzfall $k \rightarrow \infty$ entspricht nach (64) $u_1 \rightarrow \infty$ und $u_2 \rightarrow \infty$. Diese Bedingungen sind schon durch (67) erfüllt, und (72) zeigt dann auch dass $P_{q1}/P_p \rightarrow 0$.

Ferner entspricht nach (64) $k \rightarrow \infty$ $w_1 \rightarrow 0$ und $w_2 \rightarrow 0$.

Indem

$$S_{ix} \approx x; \quad C_{ix} \approx \ln(\gamma x); \quad \gamma = 1,781; \quad x \ll 1 \quad (77)$$

ergibt sich dann für die relative Energieumwandlung des einfallenden Wellentyps p in den fortschreitenden Wellentyp q

$$\frac{P_{q2}}{P_p} \approx \left[2 \frac{(\kappa_p a)(\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - (\kappa_p a)^2} \ln \frac{a_2}{a_1} \right]^2 \quad (78)$$

Diese Energieumwandlung gilt für einen divergierenden sowie für einen konvergierenden Übergang. Mit gleichen Endquerschnitten werden die Energieumwandlungen gleich für den konvergierenden wie für den divergierenden Übergang. Wie erwartet, hängt (78) nicht von θ ab.

18

Der optische Grenzwert der Energieumwandlung, der durch (78) angenähert gegeben ist, lässt sich für einen divergierenden Übergang exakt berechnen. Es ist von Interesse diesen exakten Grenzwert mit dem angenäherten Grenzwert (78) zu vergleichen. Aus einem solchen Vergleich wird man einen Eindruck von der maximalen Energieumwandlung gewinnen, bei der nicht nur die Formel (78), sondern auch die Formel (71) praktisch noch in guter Näherung verwendet werden können.

Zur Berechnung des exakten optischen Grenzwertes der Energieumwandlung, die ein im Hohlleiter 1 auf den divergierenden Übergang einfallender Wellentyp p in einen fortschreitenden Wellentyp q im Hohlleiter 2 erfährt, nehmen wir nach (1) und (10) den folgenden Ansatz für den einfallenden Wellentyp p

$$\bar{E}_p = - \frac{J_1(\kappa_{p1} r)}{\sqrt{\kappa_{p1}^2} J_0(\kappa_{p1} a_1)} \hat{\phi} e^{-jkz} \quad (79)$$

Hier ist κ_{p1} der Eigenwert des Wellentyps p im Hohlleiter. E_p ist so gewählt, dass

$$\int_{A_1} \bar{E}_p^2 da = 1$$

ist, wo A_1 der Querschnitt des Hohlleiters 1 ist. Dieses Feld bleibt optisch gleich auch im Hohlleiter 2. Wir entwickeln deshalb das Feld (79)

in Eigenfunktionen des Hohlleiters 2 und schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \bar{g}_n e^{-jkz} = \begin{cases} \bar{E}_p & r \leq a_1 \\ 0 & a_1 \leq r \leq a_2 \end{cases} \quad (80)$$

Hier ist nach (10)

$$\bar{g}_n = - \frac{J_1(\kappa_{n2} r)}{\sqrt{\kappa_{n2}^2} J_0(\kappa_{n2} a_2)} \hat{\phi} \quad (81)$$

κ_{n2} ist der Eigenwert des Wellentyps n im Hohlleiter 2. Durch skalare Multiplikation der Gleichung (80) mit \bar{g}_q erhält man, da die Vektorfunktionen orthogonal und nach (6) normiert sind, durch Integration über den Querschnitt des Hohlleiters 2

$$C_q = \frac{2}{a_1 a_2 J_0(\kappa_{p1} a_1) J_0(\kappa_{q2} a_2)} \int_0^{a_1} J_1(\kappa_{p1} r) J_1(\kappa_{q2} r) r dr \quad (82)$$

Da $J_1(\kappa_{p1} a_1) = J_1(\kappa_{q2} a_2) = 0$, ergibt sich dann der untenstehende exakte Ausdruck für die relative Energieumwandlung des einfallenden Wellentyps p in den fortschreitenden Wellentyp q

$$\frac{P_{q2}}{P_{p1}} = \left[2 \frac{a_2}{a_1} \frac{(\kappa_p a) (\kappa_q a)}{(\kappa_q a)^2 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 (\kappa_p a)^2} \frac{J_1(\kappa_q a \frac{a_1}{a_2})^2}{\kappa_q a J_0(\kappa_q a)} \right]^2 \quad (83)$$

Die relative Energieumwandlung der H_{01} -Welle ($\kappa_1 a = 3,832$) in weiterlaufende Wellen H_{02} ($\kappa_2 a = 7,016$) und H_{03} ($\kappa_3 a = 10,173$) im optischen Grenzfall wurde nach dem exakten Ausdruck (83) und dem angenäherten Ausdruck (78) in Bild 6 aufgetragen. Gezeigt ist der Energieverlust in bezug auf die Energie der auf den konischen Übergang einfallenden H_{01} -Welle in dB in Abhängigkeit von $a_2/a_1 - 1$. Man erkennt aus dem Bild, dass die Näherungsformel (78) zwar in sehr guter Näherung verwendet werden kann bis zu einem maximalen Energieverlust von etwa 2 dB der H_{01} -Welle durch Umwandlung in die H_{02} -Welle, während die Näherungsformel nur bis zu einem maximalen Energieverlust von etwa 0,05 dB der

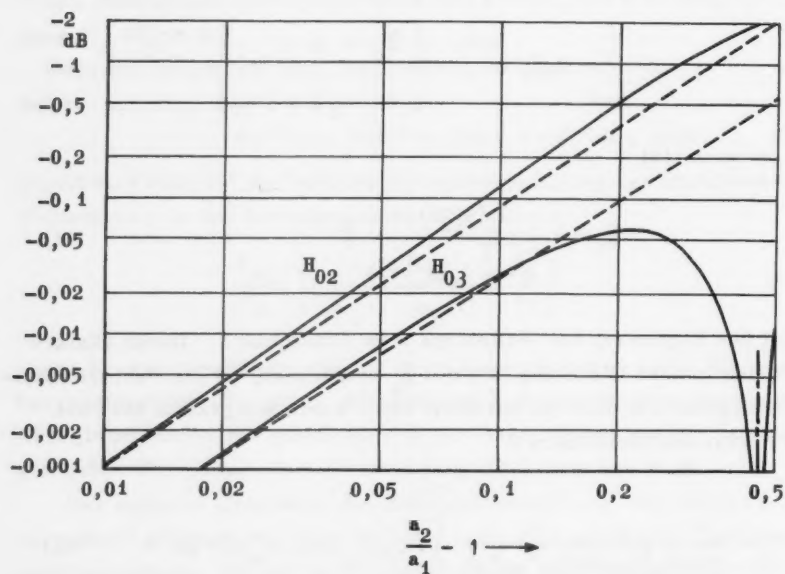


Bild 6. Energieverlust einer durch einen konischen Übergang übertragenen H_{01} -Welle durch Umwandlung in weiterlaufende H_{02} - und H_{03} -Wellen. Optischer Grenzfall. — Exakt nach (83). - - - Angenähert nach (78).

H_{01} -Welle durch Umwandlung in die H_{03} -Welle verwendet werden kann. Dies hängt nun damit zusammen, dass beim Herleiten der Näherungsformel (78) für die Energieumwandlung einer H_{01} -Welle in eine H_{0q} -Welle vorausgesetzt wurde, dass die in alle anderen Wellen H_{0n} umgewandelte Energie klein ist gegen die Energie der einfallenden H_{01} -Welle. Da nun die H_{02} -Welle erheblich stärker angeregt wird als alle anderen höheren Wellen, ist auch zu erwarten, dass die Näherungsformel bis zu einem erheblich grösseren maximalen Energieverlust der H_{01} -Welle infolge von Umwandlung in die H_{02} -Welle verwendet werden kann als durch Umwandlung in die H_{03} -Welle. Aus den Kurven in Bild 6 schliesst man deswegen, dass die Näherungsformel (71), die an die gleichen Voraussetzungen über die maximale Energieumwandlung gebunden ist wie die optische Näherungsformel (78), bis zu einem maximalen Energieverlust von etwa 2 dB für die H_{02} -Welle und etwa 0,05 dB für die H_{03} -Welle verwendet werden kann. Die Kurven in den Bildern 3 und 4 wurden demnach nur bis zu einem Energieverlust von 1 dB bzw. 0,02 dB aufgetragen.

Schlussfolgerung

Die grösste Störung der H_{01} -Übertragung durch einen konischen Übergang besteht in einer Umwandlung der einfallenden Energie in eine weiterlaufende H_{02} -Welle. Alle anderen weiterlaufenden Wellen werden erheblich schwächer angeregt als die H_{02} -Welle. Der Energieverlust durch Umwandlung in reflektierte H_{01} - und höhere Wellentypen kann praktisch vernachlässigt werden.

Schrifttum

- [1] Leonard, D.J. "Junction of smooth flared wave guides". J. Appl. Phys. 28 (1957) 1441-1448.
Yen, J.L.
- [2] Stevenson, A.F. "General theory of elektromagnetic horns". J. Appl. Phys. 22 (1951) 1447-1460.
- [3] King, A.P. "Transmission loss due to resonance
Marcatili, E.A. of loosely-coupled modes in a multi-mode system". Bell System Techn. J. 35 (1956) 899-906.
- [4] Morgan, S.P. US-Patent 2762982, Sept. 11, 1956
- [5] Schelkunoff, S.A. "Conversion of Maxwells equations into
generalized telegraphist's equations.
Bell System Techn. J. 34 (1955) 995-1043.
- [6] Marcuwitz, N. "Waveguide Handbook". MIT Rad. Lab.
series No. 10.
Mc. Graw-Hill Book Co. (1951).

AnhangLösung der Differentialgleichungen (30) und (31)

Zur Lösung der Differentialgleichungen

$$V'' + \beta^2 V = 0 \quad (30)$$

$$I'' - 2 \frac{\beta'}{\beta} I' + \beta^2 I = 0 \quad (31)$$

in der Näherung erster Ordnung in θ wurden die Ansätze

$$V = g e^{-j \int_0^z \gamma dz} \quad (32)$$

$$I = \frac{h}{j k \zeta} e^{-j \int_0^z \gamma dz} \quad (33)$$

gemacht. Hier sind γ , g und h Funktionen von θ und z , die sich nur langsam mit z ändern und nach Potenzen von θ folgendermassen entwickelt werden

$$\gamma = \sum \gamma_n(z, \theta^n), \quad g = \sum g_n(z, \theta^n), \quad h = \sum h_n(z, \theta^n) \quad (34)$$

Führt man jetzt die Ansätze (32) und (33) in (30) und (31) ein, bekommt man die folgenden Differentialgleichungen zur Bestimmung von γ , g und h

$$g'' - j2\gamma g' - (\gamma^2 - \beta^2 + j\gamma')g = 0 \quad (84)$$

$$h'' - (j2\gamma + 2 \frac{\beta'}{\beta})h' - (\gamma^2 - \beta^2 + j\gamma' - j2 \frac{\beta'}{\beta} \gamma)h = 0 \quad (85)$$

Hier werden die Ansätze (34) eingesetzt. Glieder, die von gleicher Grössenordnung in θ sind, werden dann gleichgesetzt. Indem man beachtet, dass die r -ten Ableitungen der Teilfunktionen γ_n , g_n und h_n nach z die Potenzabhängigkeit $n+r$ von θ besitzen, ergibt sich dabei die untenstehende Gleichung für die Glieder nullter Ordnung in θ

$$\gamma_0 = \beta \quad (86)$$

Für die Glieder erster Ordnung in θ entnimmt man (84) und (87) die folgenden Gleichungen in g_0 , h_0 und γ_1

$$g'_0 + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} g_0 = j \gamma_1 g_0 \quad (87)$$

$$h'_0 - \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} h_0 = j \gamma_1 h_0 \quad (88)$$

Hier kann γ_1 beliebig gewählt werden. Setzen wir $\gamma_1 = 0$, dann errechnet sich für g_0 und h_0

$$g_0 = \beta^{-\frac{1}{2}} \quad (89)$$

$$h_0 = j\beta^{\frac{1}{2}} \quad (90)$$

Die Proportionalitätskonstante j für h_0 ist notwendig um die ursprünglichen zusammengehörenden Differentialgleichungen (28) und (29) zu erfüllen. Man bemerkt, dass der Energiesatz $\text{Re } (VI^*) = \text{pos. Konst.}$ in dieser Näherung erfüllt ist.

Für die Glieder zweiter Ordnung in θ ergeben sich aus (84) und (85) zur Bestimmung von g_1 und h_1 die Gleichungen

$$g'_1 + \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} g_1 = \frac{g''_0}{2j\beta} = j \frac{1}{4} \beta^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\beta''}{\beta^2} - \frac{3}{2} \frac{(\beta')^2}{\beta^3} \right] \quad (91)$$

$$h'_1 - \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} h_1 = \frac{1}{2j\beta} (h''_0 - 2 \frac{\beta'}{\beta} h'_0) = \frac{1}{4} \beta^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\beta''}{\beta^2} - \frac{5}{2} \frac{(\beta')^2}{\beta^3} \right] \quad (92)$$

Die Lösungen dieser inhomogenen Differentialgleichungen sind

$$g_1 = j \frac{1}{4} \beta^{-\frac{1}{2}} \int \left[\frac{\beta''}{\beta^2} - \frac{3}{2} \frac{(\beta')^2}{\beta^3} \right] dz \quad (93)$$

$$h_1 = \frac{1}{4} \beta^{\frac{1}{2}} \int \left[\frac{\beta''}{\beta^2} - \frac{5}{2} \frac{(\beta')^2}{\beta^3} \right] dz \quad (94)$$

Hier ist
$$\int \frac{(\beta')^2}{\beta^3} dz = -\frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\beta''}{\beta^2} dz \quad (95)$$

Ferner ist $\beta^2 = k^2 - \kappa^2$ (96)

$$\beta\beta' = -\kappa\kappa' \quad (97)$$

$$\kappa a = \text{konst.} \quad (98)$$

$$\kappa a' + a\kappa' = \kappa\theta + a\kappa' = 0 \quad (99)$$

Einsetzung in (93) und (94) ergibt dann für g_1 und h_1

$$g_1 = j \frac{1}{16} \beta^{-\frac{1}{2}} \left[\int \frac{\beta''}{\beta^2} dz + 3 \theta \frac{(\kappa a)^2}{(\beta a)^3} \right] \quad (100)$$

$$h_1 = \frac{1}{16} \beta^{\frac{1}{2}} \left[- \int \frac{\beta''}{\beta^2} dz + 5 \theta \frac{(\kappa a)^2}{(\beta a)^3} \right] \quad (101)$$

Hier suchen wir jetzt das Integral von β''/β^2 . Aus (97) erfolgt

$$\beta\beta'' + (\beta')^2 = -\kappa\kappa'' - (\kappa')^2 \quad (102)$$

Aus (99) folgt ferner für den konischen Übergang (θ unabhängig von z)

$$\kappa'' = 2\theta^2 \frac{\kappa a}{a^3} \quad (103)$$

Durch Einsetzung in (102) errechnet sich dann

$$\beta'' = -\theta^2 \frac{\kappa^2}{\beta a^2} \left(3 + \frac{\kappa^2}{\beta^2} \right) \quad (104)$$

Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\beta''}{\beta^2} dz &= \int \frac{\beta''}{\beta^2} \frac{da}{\theta} \\ &= -\theta (\kappa a)^2 \int \left[3 + \frac{(\kappa a)^2}{(\beta a)^2} \right] \frac{1}{(\beta a)^3} \frac{da}{a} \end{aligned} \quad (105)$$

Hier ist
$$\frac{da}{a} = \frac{d(\beta a)}{\beta a} \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\beta^2}} \quad (106)$$

und das gesuchte Integral wird damit folgendermassen reduziert

$$\int \frac{\beta''}{\beta^2} dz = -\theta (\kappa a)^2 \int \frac{3(\beta a)^2 + (\kappa a)^2}{(\beta a)^2 + (\kappa a)^2} \frac{d(\beta a)}{(\beta a)^4} \quad (107)$$

$$= -\theta (\kappa a)^2 \left[\frac{2}{(\kappa a)^2} \int \frac{d(\beta a)}{(\beta a)^2} + \int \frac{d(\beta a)}{(\beta a)^4} - \frac{2}{(\kappa a)^2} \int \frac{d(\beta a)}{(\beta a)^2 + (\kappa a)^2} \right] \quad (108)$$

$$= \theta \left[\frac{2}{\beta a} + \frac{1}{3} \frac{(\kappa a)^2}{(\beta a)^3} - \frac{2}{\kappa a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\kappa a}{\beta a} \right) \right] \quad (109)$$

Durch Einsetzen dieses Integrals in (100) und (101) ergeben sich die untenstehenden Ausdrücke der gesuchten Funktionen g_1 und h_1

$$g_1 = j \frac{\theta}{16} \beta^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{10}{3} \frac{(\kappa a)^2}{(\beta a)^3} + \frac{2}{\beta a} - \frac{2}{\kappa a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\kappa a}{\beta a} \right) \right] \quad (110)$$

$$h_1 = -\frac{\theta}{16} \beta^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{14}{3} \frac{(\kappa a)^2}{(\beta a)^3} + \frac{2}{\beta a} - \frac{2}{\kappa a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\kappa a}{\beta a} \right) \right] \quad (111)$$

THE HISTORY OF THE

REIGN OF KING CHARLES THE FIRST

BY JOHN BURNET
OF THE SOCIETY OF THE APOSTOLICAL CHURCH
IN GREAT BRITAIN
AND
OF THE SOCIETY OF THE APOSTOLICAL CHURCH
IN IRELAND
IN TWO VOLUMES
THE SECOND VOLUME
LONDON
Printed by J. Streater, at the Sign of the Gun, in St. Dunstons Church-yard, near St. Dunstons Church, in the County of Middlesex.
1680.

PF. tryk.

THE LAST VOLUMES OF ACTA POLYTECHNICA ELECTRICAL ENGINEERING SERIES

(The predecessor of Acta Polytechnica Scandinavica)

Volume 7

- Nr 1 GÖRANSSON, K. and HANSSON, L: *An Experimental Investigation of Subharmonic Oscillations in a Nonlinear System*. Acta P 191 (1956), 16 pp, Sw. Kr 2: 00 UDC 621.3.018.3
- Nr 2 ANDREASEN, M G: *Reflection and Transmission through two parallel Wire Grids*. Acta P 192 (1956), 30 pp, Sw. Kr 5: 00 UDC 621.396.67
- Nr 3 ELGESKOG, E: *Photoformer Analysis and Design*. Acta P 198 (1956), 40 pp, Sw. Kr 8: 50 UDC 621.374.32:621.385.83a
- Nr 4 LOTTRUP KNUDSEN, H: *The Quadruped Antenna*. Acta P 200 (1956), 32 pp, Sw. Kr 5: 00 UDC 621.396.67.095
- Nr 5 BOLINDER, F E: *Graphical Methods for Transforming Impedances through Lossless Networks by the Cayley-Klein Diagram*. Acta P 202 (1956), 13 pp, Sw. Kr 5: 00 UDC 621.3.012:621.3.011.21
- Nr 6 SVENSSON, I, HELLGREN, G, and PERERS, O: *The Swedish Radioscientific Solar Eclipse Expedition to Italy, 1952. Preliminary Report*. Acta P 212 (1957), 30 pp, Sw. Kr 8: 00 UDC 522.13(485):523.78
- Nr 7 GUDMANDSEN, P, and LARSEN, B F: *Statistical Data for Microwave Propagation Measurements on Two Oversea Paths in Denmark*. Acta P 213 (1957), 37 pp, 29 Figs, Sw. Kr 10: 00 UDC 621.371:621.396.24(489)
- Nr 8 BOLINDER, F E: *Study of the Exponential Line by the Isometric Circle Method and Hyperbolic Geometry*. Acta P 214 (1957), 21 pp, Sw. Kr 6: 00 UDC 621.3.012:621.3.011.21
- Nr 9 EKELOF, S, BJÖRK, N, and DAVIDSON, R: *Large Signal Behaviour of Directly Heated Thermistors*. Acta P 216 (1957), 30 pp, Sw. Kr 8: 00 UDC 621.316.825
- Nr 10 BRUNDELL, P O: *A New Table of the Amplitude Functions of the Iterated Sine- and Cosine-Integrals and some Comments on the Aperiodic Functions in Hallén's Antenna Theory*. Acta P 217 (1957), 13 pp, Sw. Kr 2: 00 UDC 621.396.67
- Nr 11 DAHLGREN, F: *The Rationalization in Electromagnetism and Electrostatics*. Acta P 218 (1957), 13 pp, Sw. Kr 2: 00 UDC 621.3.013:621.3.081.1

Volume 8

- Nr 1 GEHLSHØJ, B: *Electromechanical and Electroacoustical Analogies and Their Use in Computations and Diagrams of Oscillating Systems*. Acta P 223 (1957), 140 pp, Sw. Kr 16: 00 UDC 621.39:534.1
- Nr 2 DAM, P L, RASMUSSEN, R E H, and JONASSEN, N: *On the Measurements of Electrostatic Fields and Spark Energies*. Acta P 224 (1957), 26 pp, Sw. Kr 5: 00 UDC 537.21.08
- Nr 3 ALM, E: *Fractional-Slot Windings for Three-Phase Synchronous Machines and Their Properties at Load*. Acta P 227 (1957), 42 pp, Sw. Kr 5: 50 UDC 621.313.32
- Nr 4 SUND, H: *A Sound Spectrometer for Speech Analysis*. Acta P 228 (1957), 64 pp, Sw. Kr 7: 50 UDC 534.784.087:621.39.001.11
- Nr 5 LAURENT, T: *General Physical Laws for the Electrical Filter Ladder*. Acta P 231 (1957), 21 pp, Sw. Kr 4: 00 UDC 621.372.54
- Nr 6 BOLINDER, F E: *Some Applications of the Isometric Circle Method to Impedance Transformations Through Lossless Two-Port Networks*. Acta P 232 (1957), 20 pp, Sw. Kr 6: 00 UDC 621.3.012:621.3.011.21
- Nr 7 AAGESEN, J: *Polarization-Transforming Plane Reflector for Microwaves*. Acta P 239 (1957), 28 pp, Sw. Kr. 5: 00 UDC 621.336.67
- Nr 8 EKELOF, S: *The Development and Decay of the Magnetic Flux in a Non-Delayed Telephone Relay. (A Study of Telephone Relays — 3)* Acta P 240 (1957), 51 pp, Sw. Kr. 15: 00 UDC 621.318.5:621.395.64

ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA ELECTRICAL ENGINEERING SERIES

- E1 1 MATTILA, P.: *The Theory of the Electron Wave Tube for Elliptic Cross Section*. (Acta P 241/1958), 78 pp, Sw. Kr. 7: 00 UDC 621.385.029.6
- E1 2 HYVÄRINEN, L. P.: *The Autocorrelation and Power Spectrum of Nonstationary Shot Noise*. (Acta P 252/1958), 23 pp, Sw. Kr. 7: 00 UDC 621.396.82:621.287.422
- E1 3 ANDREASEN, M. G.: *Kurze Übergänge für H_{01} -Welle* (Acta P 253/1959), 22 pp, Sw. Kr. 7: 00 UDC 621.392.26
- E1 4 ANDREASEN, M. G.: *Stetige Übergänge für H_{01} -Welle mit besonderer Berücksichtigung des homischen Übergangs*. (Acta P 254/1959), 23 pp, Sw. Kr. 7: 00 UDC 621.392.26

Price Sw. Kr. 7,00

